سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

آشنایی با احتمال و کاربردهای آن

مقدمهٔ تاریخی

منشأ پیدایش حساب احتمال پرسش‌هایی بود که در قرن هفدهم، شخصی که در بازی‌های شانسی حرفه‌ای بود برای **پاسکال**، فیلسوف و ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، دربارهٔ امکان وجود روش‌های علمی برای برنده شدن در بازی‌های شانسی مطرح کرد. این شاخه از ریاضیات از آن زمان تاکنون پیشرفت‌های زیادی کرده است و از روش‌ها و نتایج آن در همهٔ رشته‌های دانش بشری استفاده می‌شود.

در دوران قبل از تاریخ نیز احتمال برای بشر به‌صورت‌های متفاوت، به‌خصوص به صورت نقش شانس، وقوع اتفاق‌های تصادفی و دیگر موارد ظاهر شده است. ولی فقط در این اواخر آن را از دید علمی مورد بررسی دقیق قرار داده‌اند که این خود یکی از نقاط ضعف تاریخ فرهنگ بشری است.

بازی‌هایی که به شانس متکی هستند، از زمان‌های بسیار دور رایج و متداول بوده‌اند. در حفاری‌های باستان‌شناسان، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانسی مشاهده‌شده است. با این شواهد به نظر می‌رسد که نوعی تصور خام از احتمال در تصمیم‌گیری‌ها مؤثر بوده است.

استفاده از شانس برای بعضی از مقاصد قضایی و فرهنگی متداول و عمل به آن در محاکمه‌های مشکل معمول بوده است. برای مثال، در مواردی که تعیین مقصر بسیار مشکل می‌نمود، عموماً به شانس توسل می‌جستند و معتقد بودند که با این روش قوای ماوراءالطبیعه دخالت می‌کنند و مقصر معلوم خواهد شد.

امروزه در مواردی که بی‌هیچ شکی نمی‌توان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، از شانس استفاده می‌شود. برای مثال، هیئت منصفه معمولاً با قرعه انتخاب می‌شود، و در اغلب مسابقات برای شروع بازی از پرتاب سکه بهره می‌گیرند.

جامعه‌شناسان معتقدند که تکیه بر شانس، ناشی از آن است که همهٔ عوامل مؤثر در یک تصمیم‌گیری را نمی‌توان یکدفعه و یکجا در نظر گرفت. مثلاً در شرایطی که انسان قادر به تصمیم‌گیری نیست، به طالع‌بینی، پیش‌گویی، و... روی می‌آورد و از این طریق بر شانس تکیه می‌زند. این قبیل کارها، صرفاً نوعی تسکین برای کسانی است که به علت بی‌خبر بودن از حال و آیندهٔ خود در تلاطم‌اند.

به‌نظر می‌رسد که از زمان‌های بسیار دور، شانس تأثیر زیادی در تکامل و بقا داشته است. بعضی از قبایل شکارگاه‌های خود را به تصادف انتخاب می‌کردند. اگرچه انتخاب تصادفی شکارگاه‌ها در آن زمان بی‌اساس و بی‌محتوا جلوه می‌کند ولی یکی از اثراتش این است که دست‌کم مانع انهدام کامل شکارهای یک منطقه و یا احیاناً برخوردهای قبیله‌ای بر سر شکارگاه‌ها می‌شده است. حتی مشاهده شده که در بعضی موارد، انتخاب همسر نیز براساس شانس انجام می‌گرفته است. این عمل در جوامع آن روزگار دست‌کم راهی برای تثبیت تنوع ژن‌ها می‌توانسته باشد.

با وجود این همه کاربرد و اهمیت شانس در جوامع بشری، متفکران معتبر تا قبل از عصر علوم جدید (علوم متکی بر تجربه) آن را یا انکار کردند و یا اگر قادر به انکار آن نبودند، از دیدگاه علمی آن را قابل بحث نمی‌دانستند.

توماس اکویناس *(Thomas Aquinas) معتقد بود که شانس چیزی جز تقارن و وحدت دو یا چند علت نیست. به عقیدهٔ وی، مرموز جلوه دادن شانس تنها به این علت است که فهم بشری نمی‌تواند تمام علل را دریابد و تأثیرات متقابل آن‌ها را درک کند. در مثال معروفی می‌گویند: «اربابی را درنظر بگیرید که*

دو خدمتکار دارد. به هرکدام از آن‌ها جداگانه دســتور می‌دهد، در زمان معینی در مکان معینی باشند. از آنجا که خدمتکاران از نقشهٔ ارباب خبر ندارند، این تقارن و برخورد در یک زمان و مکان را امری تصادفــی تلقی می‌کنند و حال آنکه اگر آن‌ها اطلاعات ارباب خود را می‌داشــتند، هیچ‌گاه به توجیهات متکی بر شانس توسل نمی‌جستند.»

در ادامهٔ همین طرزتفکــر، **اسپینوزا** (Spinoza) ادعا کرد که هرچیزی بنا بر ضرورت طبیعت تعیین شده‌است و به طریق مشخص عمل می‌کند. نسبت دادن شانس به یک رویداد، به‌طور صرف بیانگر نقص اطلاعات ماست. وی همانند اکویناس شانس را بی‌اســاس و موهوم می‌داند و عقیده دارد: «شانس چیزی جز ناآگاهی ما از حقایق نیســت». توجه به این مطلب مهم اســت که ناسازگاری شــانس با مقولاتی نظیر ارادهٔ آزاد، مسئولیت و... فیلسوف را از رسیدن به نسخه‌ای قطعی در زمینهٔ شانس تقریباً محروم می‌ســازد. بررسی هرچند کوتاه این قبیل مقولات که به شــانس مربوط می‌شوند، خود به مقالات متعدد نیاز دارد که در این مختصر نمی‌گنجد.

در قرون وسطا که کشفیاتی در ستاره‌شناسی، فیزیک و طب به‌دســت آمد، دیگر برای علوم آکادمیک جای آن نبود که نقش تجربــه و داده‌های تجربی را انکار کننــد. از اینجا نقطهٔ عطفی در علوم آغاز شــد. از جمله فیلســوفان بزرگی که در این مقطع می‌توان از آن‌ها یاد کرد، **فرانسیس بیکن** (Fransis Bacon) است که نوشته‌های او بی‌شک بیشــترین انتقاد را از روش‌های علمی گذشتگان در بردارد.

او متفکــران را به تغییر رویه از روش‌های علمی تجریدی به روش‌های تجربی دعوت کرد و خواســتار ابداع روش‌هایی شــد که به کمک آن‌ها بتوان داده‌های تجربی و نتایج به‌دســت آمده از مشــاهدات را تفسیر کرد. به این منظور است که بیکن را پدر روش‌های علمی ـ تجربی می‌دانند که همان روش علوم امروزی است.

با رشــد و ترقی و توســعهٔ روش‌های تجربی، توســعهٔ علم احتمال نیز آغاز شــد. لازم به ذکر است که مقدار خیلی کمی از محاسباتی که به‌طور صوری در احتمال آغاز شد، مربوط به علوم تجربی می‌شــد. طی سال‌های متمادی، احتمال به‌طور کامل به محاسباتی در بازی‌های شانسی اختصاص داشت. به همین دلیل است که شروع رسمی تاریخ احتمال، مصادف با انتشار مقالاتی دربارهٔ بازی‌های شانسی در اواخر دورهٔ رنسانس در ایتالیاست.

احتمال از دیدگاه تاریخی و کاربردی

اکنون در اینجا چند مســئله تاریخی در زمینهٔ احتمال را مطرح می‌کنیم و به صورت مختصر روش حل آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

مسئلهٔ ۱. احتمال اینکه دو عدد صحیح مثبت که به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، تابعی از عدد π و برابر با $\frac{6}{\pi^2}$ است.

لازم به ذکر اســت که **چارتر** مشهور در حدود سال ۱۹۰۴ این حکم ریاضی را به‌طور تجربی آزموده اســت. به این ترتیب که به هر یک از ۵۰ شــاگردش گفت پنج جفت عــدد صحیح مثبت را به‌طور تصادفی بنویسند. از میان ۲۵۰ جفت عددی که به این طریق به‌دست آمد، ۱۵۴ جفت نســبت به هم اول بودند و احتمال برابر $\frac{154}{250}$ بود. او این نســبت را برابر با $\frac{6}{\pi^2}$ گرفت و عدد ۳/۱۲ را به‌دست آورد که نزدیک به عدد π است: ....π=۳/۱۴۱۵۹۲

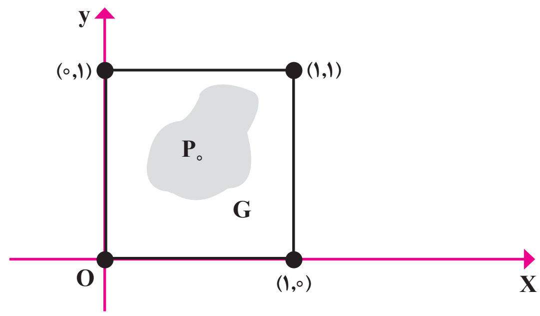
❋ **فعالیت ریاضی:** دانش‌آموزان عزیز می‌توانند این کار را با تعداد بیشــتری از دوســتان خود در مدرســه آزمایش‌کنند و به نتایجی شــگفت‌انگیز دست‌یابند و نشــان‌دهند با چه تعداد آزمایش، حاصل به عدد واقعی π، یعنی ۳/۱۴ خواهد رسید. با افزایش نفرات، به عدد ۳/۱۴۱۵ (با چهار رقم اعشــار درســت) برای عدد π به‌طور تجربی و به کمک احتمال خواهند رســید. (نتایــج را در جدولی ثبت و به مربیان خود نشان دهید). این موضوع شگفت‌آور است؛ اینکه انتخاب تصادفــی جفت‌هایی از عددهای صحیح مثبت بتواند ارتباطی با عدد π داشــته باشد، دور از تصور است. چشم‌انداز محاسبهٔ عملی مقدار π از طریق آزمایش‌های تکراری که ضمن آن‌ها تولیدکنندهٔ جفت‌های عددهای صحیح نمی‌داند از این جفت‌ها چه اســتفاده‌ای می‌شود، به کلی باورنکردنی به نظر می‌رسد.

متذکر می‌شــویم، ریاضیاتی که برای نشان دادن برابری احتمال فوق با $\frac{6}{\pi^2}$ لازم اســت، فراتر از محدوده‌ای است که برای بحث قائل شده‌ایم. با این حال، اگر دخالت π در چنین نتایجی شگفت‌آور است، ملاحظهٔ مثال سادهٔ دیگری که مطرح می‌کنیم، تا حدی این شگفتی را توجیه می‌کند.

مسئلهٔ ۲. فرض می‌کنیم دو عدد مثبت x و y که هر دو کوچک‌تر از عدد ۱ هستند، به تصادف انتخاب و نوشته شود.

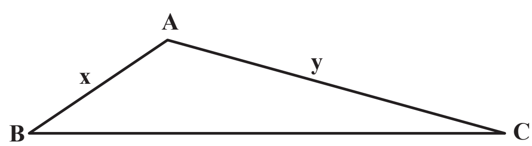
احتمال اینکــه همراه با عدد ۱، یک ســه‌تایی (x,y,1) از اعداد به‌دست آید که اضلاع یک مثلث منفرجه‌الزاویه باشند، برابر با $\frac{\pi-2}{4}$ است.

برای توجیه این ادعا، ملاحظه می‌کنیم که هر جفت از عددهای x و y نقطه‌ای مثل P (x,y) را در مربع واحد مشخص می‌کنند (مطابق شکل ۱) که مختصات آن (x,y) است. چون هر یک از مختصات به تصادف از بازه واحد انتخاب می‌شود، احتمال قرار گرفتن نقطهٔ متناظر P (x,y) در هر جای مربع یکی است. به بیان دقیق‌تر، احتمال اینکه P داخل ناحیه‌ای مانند G از مربع قرار گیرد، برابر است با نسبت مساحت G به مساحت کل مربع (شکل ۱). چون مساحت مربع برابر با واحد است. احتمال قرار گرفتن P در G برابر با مساحت G است.



شکل ۱

اکنون مثلثی به اضلاع x , y و ۱ در نظر می‌گیریم (مطابق شکل ۲):



شکل ۲

هر یک از ضلع‌های x و y که هر دو از یک کوچک‌ترند، از ضلع BC=۱ کوچک‌تر هستند. چون بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث، مقابل به بزرگ‌ترین ضلع است، می‌بینیم که زاویه‌های B و C کوچک‌تر از زاویهٔ A هستند. و چون فقط یک زاویهٔ هر مثلث می‌تواند منفرجه باشد، در مثلث ABC اگر چنین زاویه‌ای وجود داشته باشد، زاویهٔ A است. حال برای اینکه طول‌های x، y و ۱ هر نوع مثلثی تشکیل دهند، مجموع هر دو تا از آن‌ها باید بیش‌تر از سومی باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$x+y > ۱ \quad ; \quad ۱+x > y \quad ; \quad ۱+y > x$$

پس شرط اینکه مثلثی تشکیل شود، در حالت عمومی و به‌طور خلاصه چنین است (دو حالت دیگر بدیهی است):

$$x+y > ۱ \qquad (۱)$$

اگر نامعادله (۱) برقرار باشد، از (x,y,۱) مثلثی به دست خواهد آمد، ولی چنین مثلثی ممکن است حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه و یا منفرجه‌الزاویه باشد. برای ملاحظهٔ این مطالب که نوع زاویه به مقدار $x^۲+y^۲$ بستگی دارد، قانون کسینوس‌ها را در مثلث ABC به کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲=۱+۲xy\cos\hat{A} \qquad (۲)$$

(توجه داریم که رابطهٔ کسینوس‌ها چنین است:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$$

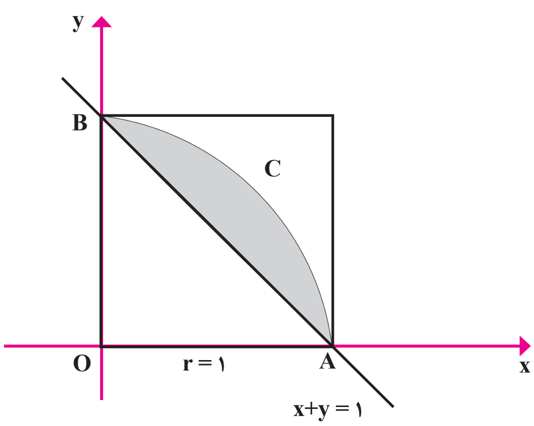
پس:

$$(۱^۲=y^۲+x^۲-۲xy\cos\hat{A}$$

در رابطهٔ (۲)، اگر $\hat{A}$ زاویه‌ای منفرجه باشد، $\cos\hat{A}$ منفی است و در غیراین صورت چنین نیست. پس شرط اینکه ΔABC منفرجه‌الزاویه باشد، این است که داشته باشیم:

$$x^۲+y^۲<۱ \qquad (۳)$$

حال نقاط (x,y) که در نابرابری x+y > ۱ صدق می‌کنند، در بالای قطر AB از مربع واحد قرار دارند (مطابق شکل ۳).



شکل ۳

و نقاطی که در نابرابری (۳) صدق می‌کنند، داخل دایره‌ای به شعاع واحد (r=۱) قرار دارند (زیرا برای نقاط روی دایره داریم: $x^۲+y^۲=۱$). پس، مجموعهٔ نقاطی که هم در نابرابری (۱) و هم در نابرابری (۳) صدق می‌کنند، در ناحیهٔ سایه‌دار بین ربع دایره و قطر مربع قرار دارند. بنابراین احتمال اینکه مثلث منفرجه‌الزاویه‌ای را به دست دهد، چنین است:

مساحت مثلث AOB ـ مساحت ربع دایره AOB = مثلث قطعه ABC

$$=\frac{۱}{۴}\pi(۱^{۲})-\frac{۱}{۲}(۱)(۱)$$

$$=\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{\pi-۲}{۴}$$

در اینجا حکم ثابت می‌شود.

به مسائل تاریخی بسیاری در مورد احتمال می‌توان اشاره کرد که در رابطه باعلوم پایه هستند؛ از جمله موضوع‌های زیر:

- اصل عدم قطعیت هایزنبرگ؛
- اصل مکملی؛
- الکترومغناطیسی؛
- بستهٔ موج؛
- تابع احتمال؛
- تابع موج؛
- مکانیک کوانتومی؛
- معادلهٔ شرودینگر.

و بســـیاری از موضوع‌های دیگر که بدون تابع احتمال و بررسی احتمالی وقوع رویداد موردنظر و بـــدون وارد کردن قوانین احتمال، امکان تصمیم‌گیری و نتیجه‌گیری نزدیک به غیرممکن بود. در اینجا لازم اســـت که به یکی دیگر از مسائل مهم تاریخی در مورد احتمال اشـــاره شود و آن مسئلهٔ بسیار شـــگفت‌آور «سوزن بوفون» (بوفمن) اســـت. این مسئله در واقع راه‌حلی تقریبی است برای به‌دست آوردن عدد پـــی (π) و ابتدا از ســـوی **ژرژـ لویی کلرک کنت دو بوفون** مطرح شده است.

مســـئلهٔ ۳. فرض کنید یک برگه یا ســـطحی داریم که روی آن به فواصل معین خطوط موازی کشیده‌ایم. با فرض اینکه فاصلهٔ خطوط ۱ باشد، سوزنی به طول ۱ واحد انتخاب می‌کنیم.

(این ســـوزن می‌تواند بیشتر یا کمتر از ۱ واحد نیز باشد). سوزن را به دفعات (بیش از ۳۰۰ مرتبه) به‌طور تصادفی روی برگه یا صفحه می‌اندازیم. تعداد دفعاتی را که ســـوزن یکـــی از آن خطوط را قطع می‌کند، نســـبت به کل دفعات می‌سنجیم. این نسبت (یعنی در واقع احتمال برخورد ســـوزن به خطوط موازی) حدود $\frac{۱}{\pi}$ می‌شود. و این مستقل از نسبت طول ســـوزن به فاصلهٔ دو خط موازی است. هرچه تعداد دفعاتی که سوزن را می‌اندازیم رو به بی‌نهایت میل کند، تقریب عـــدد پی (π) به خودش نزدیک‌تر می‌شـــود. حالت خاص این قضیه چنین است:

اگر طول ســـوزن به‌طور دقیق نصف فاصلهٔ بین خطوط باشـــد، احتمال برخورد به خطوط $\frac{۱}{\pi}$ می‌شود.

(برای اطلاع بیشتر دربارهٔ اثبات، در اینترنت Buffons Needle را جست‌وجو کنید).